

# חשבון אינפיניטסימלי

פרק 32 - תרגילים מתקדמים נוספים (הפרק באנגלית)

תוכן העניינים

1. סדרות.....1
2. גבולות ורציפות.....2
3. משפט ערך הביניים ומשפט ויירשטראס.....3
4. גזירות ומשפטי הערך הממוצע.....4
5. טורי חזקות וטורי טיילור.....6
6. המשפט היסודי של החדוא, משפט ערך הביניים לאינטגרלים וסכומי רימן.....7
7. נפח שטח מעטפת ומשפט פאפוס.....9

## Convergence of a Sequence, Monotone Sequences (סדרות)

### Questions

- 1) Let  $A$  be a non-empty subset of  $\mathbb{R}$  and  $\alpha = \inf A$ . Show that there exists a sequence  $(a_n)$  such that an  $a_n \in A$  for all  $n \in \mathbb{N}$  and  $a_n \rightarrow \alpha$ .
- 2) Let  $A$  be a non-empty subset of  $\mathbb{R}$  and  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Show that there exists a sequence  $(a_n)$  in  $A$  such that  $|x_0 - a_n| \rightarrow d(x_0, A)$ . Recall that  $d(x, A) = \inf \{|x - a| : a \in A\}$ .
- 3) Let  $(a_k)$  be a bounded sequence. For every  $n \in \mathbb{N}$ , define  $x_n = \sup\{a_k : k < n\}$ . Show that the sequence  $(x_n)$  converges.

### Cauchy Criterion, Bolzano - Weierstrass Theorem

- 4) Show that a sequence  $(x_n)$  of real numbers has no convergent subsequence if and only if  $|x_n| \rightarrow \infty$ .
- 5) Let  $(x_n)$  be a sequence in  $\mathbb{R}$  and  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Suppose that every subsequence of  $(x_n)$  has a subsequence converging to  $x_0$ . Show that  $x_n \rightarrow x_0$ .
- 6) Let  $(x_n)$  be a sequence in  $\mathbb{R}$ . We say that a positive integer  $n$  is a peak of the sequence if  $m > n$  implies  $x_n > x_m$  (i.e., if  $x_n$  is greater than every subsequent term in the sequence).
  - a) If  $(x_n)$  has infinitely many peaks, show that it has a decreasing subsequence.
  - b) If  $(x_n)$  has only finitely many peaks, show that it has an increasing subsequence.
  - c) From (a) and (b) conclude that every sequence in  $\mathbb{R}$  has a monotone subsequence. Further, every bounded sequence in  $\mathbb{R}$  has a convergent subsequence (An alternate proof of Bolzano-Weierstrass Theorem).

## Continuity and Limits (גבולות ורציפות)

### Questions

- 1) Let  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 5$ . Show that  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ .
- 2) Let  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  and  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Suppose  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  exists.  
Show that  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x + x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .
- 3) Let  $f(x) = |x|$  for every  $x \in \mathbb{R}$ . Show that  $f$  is continuous on  $\mathbb{R}$ .
- 4) Let  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by  $f(0) = 0$  and  $f(x) = x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  for  $x \neq 0$ .  
Is  $f$  continuous?
- 5) Let  $[\cdot]$  denote the integer part function and  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by  $f(x) = [x^2] \sin \pi x$ .
  - a) Show that  $f$  is continuous at each  $x \neq \sqrt{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . [Here  $\mathbb{N}$  includes 0]
  - b) Show that  $f$  is continuous at each  $x = k \in \mathbb{N}$ .
  - c) Show that  $f$  is discontinuous at each  $x = \sqrt{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  such that  $x \notin \mathbb{N}$ .
- 6) Let the function  $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$  be one-one and onto. Suppose  $f$  is continuous.  
Show that  $f^{-1}$  is also continuous.
- 7) Let  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  be given by
 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{if } x = \frac{p}{q} \text{ where } p, q \in \mathbb{N} \text{ and } p, q \text{ have no common factor} \\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$
  - a) Suppose  $x_n \rightarrow x_0$  for some  $x_0$ , with  $x_n \neq x$  for all  $n \in \mathbb{N}$ , and suppose  $x_n = \frac{p_n}{q_n} \in (0, 1)$  where  $p_n, q_n \in \mathbb{N}$  have no common factors. Show that  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$ .
  - b) Show that  $f$  is continuous at every irrational.
  - c) Show that  $f$  is discontinuous at every rational.

## Existence of Extrema, Intermediate Value Property (משפט ערך הביניים ומשפט ויירשטראס)

### Questions

- 1) Give an example of a function  $f$  on  $[0,1]$  which is not continuous but satisfies the IVP\*. \*We say that  $f$  has the property IVP [Intermediate Value Property] on  $[a,b]$  if for every  $x, y \in [a,b]$  and  $\alpha$  satisfying  $f(x) < \alpha < f(y)$  or  $f(x) > \alpha > f(y)$  there exists  $x_0 \in [x, y]$ , such that  $f(x_0) = \alpha$ .
- 2) Let  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a continuous function. Show that  $f$  is a constant function if
  - a)  $f(x)$  is rational for each  $x \in \mathbb{R}$ .
  - b)  $f(x)$  is an integer for each  $x \in \mathbb{Q}$ .
- 3) Let  $p(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a polynomial function of odd degree. Show that  $p$  is onto.
- 4) Let  $f, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  be continuous such that
 
$$\inf\{f(x) : x \in [0,1]\} = \inf\{g(x) : x \in [0,1]\}.$$
 Show that there exists  $x_0 \in [0,1]$  such that  $f(x_0) = g(x_0)$ .
- 5) A cross country runner runs continuously an eight kilometers course in 40 minutes without taking rest. Show that, somewhere along the course, the runner must have covered a distance of one kilometer in exactly 5 minutes.
- 6) Let  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a continuous function.
  - a) Suppose  $f$  attains each of values exactly two times. Given:
 
$$f(x_1) = f(x_2) = \alpha \text{ for some } x_1, x_2, \alpha \in \mathbb{R}, \text{ and } f(x_0) > \alpha \text{ for some } x_0 \in [x_1, x_2].$$
 Show that  $f$  attains its maximum in  $[x_1, x_2]$  exactly at one point.
  - b) Using (a) show that  $f$  cannot attain each of its values exactly two times.

## Mean Value Theorem, L'Hôpital's Rule, Differentiability (משפט לגראנז', כלל לופיטל וגזירות)

### Questions

- 1) Does there exist a differentiable function  $f:[0,2] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfying  $f(0) = -1$ ,  $f(2) = 4$  and  $f'(x) \leq 2$ , for all  $x \in [0,2]$ ?
- 2) Let  $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be differentiable such that for some  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $|f'(x)| \leq \alpha < 1$  for all  $x \in \mathbb{R}$ . Let  $a_1 \in \mathbb{R}$  and define a sequence  $(a_n)$  recursively by  $a_{n+1} = f(a_n)$ . Show that  $(a_n)$  converges.
- 3) Let  $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  be differentiable and let  $\alpha \in \mathbb{R}$  be such that  $f'(a) < \alpha < f'(b)$ . Define  $g(x) = f(x) - \alpha x$  for all  $x \in [a,b]$ .
  - a) Show that there exists  $c \in [a,b]$  such that  $g'(c) = 0$ .  
Hint: prove by contradiction, noting that  $g'(a) < 0$  and  $g'(b) < 0$ .
  - b) From the above, conclude that if a function  $f$  is differentiable on an interval  $[a,b]$ , then  $f'$  has the Intermediate Value Property on  $[a,b]$ .
- 4) Suppose  $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  is continuous and  $\int_0^1 f(t)dt = 1$ .
  - a) Show that there exists  $c \in (0,1)$  such that  $f(c) = 1$ .
  - b) Show that there exist  $c_1 \neq c_2$  in  $(0,1)$  such that  $f(c_1) + f(c_2) = 2$ .
- 5) Let  $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  be such that  $|f'(x)| < 10$  for all  $x \in (0,1)$  and let  $(x_n)$  be a sequence in  $(0,1)$  satisfying the Cauchy criterion. Show that the sequence  $(f(x_n))$  converges.
- 6) Let  $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  and  $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right)$ ,  $n=1,2,\dots$   
Show that:
  - a) if  $f$  is continuous, then  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converges;
  - b) if  $f$  is differentiable and  $|f'(x)| < \frac{1}{2} \forall x \in [0,1]$ , then  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\cos n) \sqrt{n}$  converges.

- 7) Let  $p(x) = a + bx + cx^2$ . Find all values of  $a, b, c \in \mathbb{R}$  for which the function  $p(|x|)$  is differentiable at 0.

## Power Series, Taylor Series (טורי חזקות וטורי טיילור)

### Questions

- 1) Let  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  be infinitely differentiable and let  $x_0 \in (a, b)$ . Suppose that there exists  $M > 0$  such that  $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$  for all  $n \in \mathbb{N}$  and  $x \in (a, b)$ . Show that Taylor's series of  $f$  around  $x_0$  converges to  $f(x)$  for all  $x \in (a, b)$ .
  
- 2) Let  $(a_n)$  be a sequence of nonnegative reals and suppose that  $(a_n^{\frac{1}{n}})$  is a bounded sequence. For each  $n$ , define  $A_n = \sup\{a_k^{\frac{1}{k}} : k \geq n\}$ .  $(A_n)$  converges since it is decreasing and bounded below (by 0). So  $A_n \rightarrow L$  for some  $L \geq 0$ .
  - a) Show that if  $L < 1$ , the series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converges and if  $L > 1$  the series diverges.
  - b) Show that the radius of convergence of the power series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  is  $\frac{1}{L}$ .

## המשפט היסודי של החדו"א, משפט ערך הביניים לאינטגרלים וסכומי רימן

### שאלות

(1) תהי  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת כך:  $f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ ,

ונגדיר את  $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$  עבור  $-1 \leq x \leq 1$ .

שרטטו את הגרפים של  $f$  ו- $F$ , בהינתן:

א.  $f$  אינה רציפה (ב-0), אבל  $F$  רציפה.

ב.  $F$  אינה גזירה ב-0.

ג. תן דוגמה לפונקציה  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , כך ש- $f$  אינה רציפה ב-0,

אבל  $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$  גזירה ב-0.

(2) הוכיחו את 'משפט ערך הביניים השני לאינטגרלים', בהנחה שהפונקציות רציפות (ולא אינטגרביליות):

תהי  $f$  רציפה ב- $[a, b]$ .

אם קיימת פונקציה גזירה  $F$  ב- $[a, b]$ , כך ש- $F' = f$ ,

אז  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .

(3) תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה.

הוכיחו כי  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(P, f) = \int_a^b f(x) dx$ .

סימונים:  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  עם  $x_0 = a$  ו- $x_n = b$ ,  $S(P, f) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,

$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$ ,  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

(4) תהי  $a_n = \ln \left( \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \right)$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

המירו את  $a_n$  לסכום רימן ומצאו את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

(5) תהינה  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , כך ש- $f'$  ו- $g'$  רציפות ב- $[a, b]$ .

הוכיחו כי  $\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$ .



**(6)** תהי  $\phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה ברציפות, ותהי  $f$  רציפה בטווח של  $\phi$ .

$$\text{הוכיחו כי } \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx$$

**(7)** תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ויהיו  $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  גזירות.

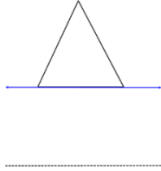
הוכיחו כי אם הטווחים של  $u$  ו- $v$  מוכלים ב- $[a, b]$ ,

$$\text{אז } \frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## נפח שטח מעטפת ומשפט פאפוס

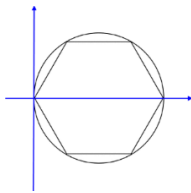
### שאלות



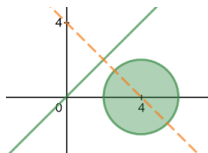
- (1) נתון משולש שווה צלעות עם בסיס המתלכד עם ציר ה- $x$ .  
אורך צלע המשולש  $a$ .  
השתמשו במשפט פאפוס על מנת לחשב את נפח הגוף,  
הנוצר על ידי סיבוב המשולש סביב הישר  $y = -a$ .



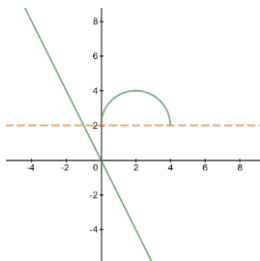
- (2) השתמשו במשפט פאפוס ומצאו את מרכז הכובד של התחום  
 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, x \geq 0 \text{ and } y \geq 0\}$   
 רמז: נפח כדור בעל רדיוס  $r$ , הוא  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .



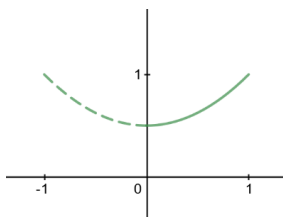
- (3) נתון משושה החסום במעגל  $(x-2)^2 + y^2 = 1$ .  
המשושה מסתובב סביב ציר ה- $y$ .  
מצאו את שטח הפנים של השטח שנוצר,  
ואת נפח הגוף שנוצר.



- (4) הדיסק המעגלי  $(x-4)^2 + y^2 \leq 4$  מסתובב סביב הציר  $y = x$ .  
מצאו את נפח הגוף שנוצר.



- (5) נתבונן בקשת המעגלית  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4, y \geq 2$ .  
הקשת מסתובבת סביב הציר  $y + 2x = 0$ .  
מצאו את שטח הפנים של הגוף שנוצר.



- (6) יהיו  $(\bar{x}, \bar{y})$  מרכז העקום  $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1), 0 \leq x \leq 1$ .  
מצאו את  $\bar{x}$  בעזרת משפט פאפוס.